2016年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$收敛，则（　　）

$(A)a<1且b>1$　$(B)a>1且b>1$　$(C)a<1且a+b>1$　$(D)a>1且a+b>1$

（2）已知函数$f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1\\ \ln x,x\geq 1\end{cases}$，则$f(x)$的一个原函数是（　　）

$(A)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1),x\geq 1\end{cases}$　$(B)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)-1,x\geq 1\end{cases}$

$(C)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)+1,x\geq 1\end{cases}$　$(D)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1)+1,x\geq 1\end{cases}$

（3）若$y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2},y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$是微分方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个解，则$q(x)=$（　　）

$(A)3x(1+x^2)$　$(B)-3x(1+x^2)$　$(C)\frac{x}{1+x^2}$　$(D)-\frac{x}{1+x^2}$

（4）已知函数$f(x)=\begin{cases}x,x\leq 0\\ \frac{1}{n},\frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n},n=1,2,\cdots\end{cases}$，则（　　）

（A）$x=0$是$f(x)$的第一类间断点　（B）$x=0$是$f(x)$的第二类间断点

（C）$f(x)$在$x=0$处连续但不可导　（D）$f(x)$在$x=0$处可导

（5）设A，B是可逆矩阵，且A与B相似，则下列结论错误的是（　　）

（A）A^T与B^T相似　（B）A^{-1}与B^{-1}相似

（C）$A+A^T$与$B+B^T$相似　（D）$A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似

（6）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则$f(x_1,x_2,x_3)=2$在空间直角坐标下表示的二次曲面为（　　）

（A）单叶双曲面　（B）双叶双曲面　（C）椭球面　（C）柱面

（7）设随机变量 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)(\sigma>0)$，记 $p=P\left\{X\le\mu+\sigma^2\right\}$，则（　　）

（A） p 随着 μ 的增加而增加　　（B） p 随着 σ 的增加而增加

（C） p 随着 μ 的增加而减少　　（D） p 随着 σ 的增加而减少

（8）随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$________

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 $rotA=$________

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$________

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f''(0)=1$，则 $a=$________

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________.

（14）设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,2\le r\le2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D xdxdy$.

（16）（本题满分 10 分）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中 $0<k<1$.

(I) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛；

(II) 若 $y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值.

（17）（本题满分 10 分）设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值

（18）设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+1\right)dydz-2ydzdx+3zdxdy$

（19）（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2\ldots)$，证明：

（I）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（II）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

（20）（本题满分 11 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$

当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

（I）求 A^{99}

（II）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

（22）（本题满分 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1,X\le Y\\0,X>Y\end{cases}$$

（I）写出 (X,Y) 的概率密度；

（II）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（III）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

（23）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\0,其他\end{cases}$，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$。

（1）求 T 的概率密度

（2）确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计