

2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$ ，则

A. $a = \frac{1}{2}, b = -1$ B. $a = -\frac{1}{2}, b = -1$

C. $a = \frac{1}{2}, b = 1$ D. $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

【答案】

【解析】

2. 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x) = |x| \sin(x)$ B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

C. $f(x) = \cos|x|$ D. $f(x) = \cos|x|$

【答案】

【解析】

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-ax, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x-b, & x \geq 0 \end{cases}$, 若 $f(x) + g(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续,

则

A. $a = 3, b = 1$

B. $a = 3, b = 2$

C. $a = -3, b = 1$

D. $a = -3, b = 2$

【答案】

【解析】

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ，则

A. 当 $f'(x) < 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ B. 当 $f''(x) < 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

C. 当 $f'(x) > 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ D. 当 $f''(x) > 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

【答案】

【解析】

5. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

- A. $M > N > K$ B. $M > K > N$
 C. $K > M > N$ D. $K > N > M$

【答案】

【解析】

6. $\int_{-1}^0 dx \int_x^{2-x^2} (1-xy) dy + \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} (1-xy) dy =$

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{6}$
 C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{7}{6}$

【答案】

【解析】

7. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【答案】

【解析】

8. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, (X, Y) 表示分块矩阵, 则

- A. $r(A \ AB) = r(A)$. B. $r(A \ BA) = r(A)$.
 C. $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$. D. $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$.

【答案】

【解析】

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] =$ _____.

【答案】

【解析】

10. 曲线 $y = x^2 + 2 \ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

【答案】

【解析】

11. $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx =$ _____.

【答案】

【解析】

12. 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为_____.

【答案】

【解析】

13. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\ln z + e^{z-1} = xy$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, \frac{1}{2})} =$ _____.

【答案】

【解析】

14. 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组. 若 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$,

$A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, $A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$, 则 A 的实特征值为_____.

【答案】

【解析】

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$ 的值

【答案】

【解析】

16. (本题满分 10 分)

【答案】

【解析】

17. (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D (x + 2y) dx dy$.

【答案】

【解析】

18. (本题满分 10 分)

已知常数 $k \geq \ln 2 - 1$, 证明: $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$

【答案】

【解析】

19. (本题满分 10 分)

将长为 $2m$ 的铁丝分成三段, 依次围城圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值。

【答案】

【解析】

20. (本题满分 11 分)

已知曲线 $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geq 0)$, 点 $O(0,0)$, 点 $A(0,1)$, 设 P 是 L 上的动点, S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成图形的面积, 若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 求此时 S 关于时间 t 的变化率。

【答案】

【解析】

21. (本题满分 11 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0$, $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n=1,2,\dots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

【答案】

【解析】

22. (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数。

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形

【答案】

【解析】

23. (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 求 a

(2) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P

【答案】

【解析】



跨考教育
WWW.KUAKAO.COM



跨考教育
WWW.KUAKAO.COM



跨考教育
WWW.KUAKAO.COM



跨考教育
WWW.KUAKAO.COM