

## 2019年1月份管综初数真题

一、问题求解（本大题共5小题，每小题3分，共45分）下列每题给出5个选项中，只有一个是符合要求的，请在答题卡上将所选择的字母涂黑。

1、某车间计划10天完成一项任务，工作3天后因故停工2天。若要按原计划完成任务，则工作效率需要提高（ ）

- A. 20%      B. 30%      C. 40%      D. 50%      E. 60%

【答案】C

【详解】整个工程看做单位“1”，原计划的工作效率为 $\frac{1}{10}$ ，实际的工作效率为

$$\frac{1 - \frac{1}{10} \times 3}{10 - 3 - 2} = \frac{7}{50}, \text{ 因此工作效率提高了 } \frac{\frac{7}{50} - \frac{1}{10}}{\frac{1}{10}} = 40\%, \text{ 选 C.}$$

2、设函数 $f(x) = 2x + \frac{a}{x^2} (a > 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最小值为 $f(x_0) = 12$ ，则 $x_0 =$ （ ）

- A. 5      B. 4      C. 3      D. 2      E. 1

【答案】B

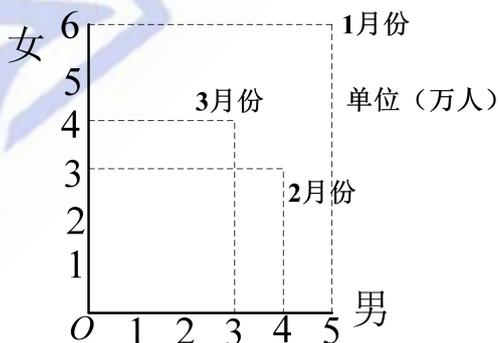
【详解】利用三个数的均值定理求最值： $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ 。

$$f(x) = 2x + \frac{a}{x^2} = x + x + \frac{a}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{x \cdot x \cdot \frac{a}{x^2}}, \text{ 因此最小值为 } 3\sqrt[3]{a} = 12 \rightarrow a = 64, \text{ 因此}$$

$$x = x = \frac{64}{x^2} \rightarrow x = 4, \text{ 选 B.}$$

3、某影城统计了一季度的观众人数，如图，则一季度的男女观众人数之比为（ ）

- A. 3:4      B. 5:6      C. 12:13      D. 13:12      E. 4:3



【答案】C

【详解】如图可得:一季度男女观众人数分别为:

$$\text{男: } 5w + 4w + 3w = 12w$$

$$\text{女: } 6w + 3w + 4w = 13w$$

故一季度男女人数比为: 12:13, 选 C.

4、设实数  $a, b$  满足  $ab = 6$ ,  $|a+b| + |a-b| = 6$ , 则  $a^2 + b^2 = ( )$

A.10    B.11    C.12    D.13    E.14

【答案】D

【详解】观察选项, 所求的值必然是唯一的, 因此为了去掉已知等式的绝对值, 可以设定  $a, b$  的正负性和大小关系。

由  $ab = 6$  可知  $a, b$  同号, 故设  $a > 0, b > 0, a > b$ , 因此去掉绝对值可得:

$a + b + a - b = 6 \rightarrow a = 3$ , 又已知  $ab = 6$ , 得  $b = 2$ , 所求  $a^2 + b^2 = 13$ , 选 D。

5、设圆 C 与圆  $(x-5)^2 + y^2 = 2$  关于  $y = 2x$  对称, 则圆 C 方程为 ( )

A.  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2$     B.  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 2$

C.  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 2$     D.  $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 2$

E.  $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 2$

【答案】E

【详解】圆心  $(5, 0)$  关于  $y = 2x$  的对称点即为圆 C 的圆心, 圆心的半径  $\sqrt{2}$ , 设圆 C 的圆心为  $(a, b)$

$A(5, 0) \xrightarrow{y=2x} A'(a, b)$

$$\text{列方程组} \begin{cases} \frac{b}{2} = 2 \times \frac{5+a}{2} & (AA' \text{中点在线上}) \\ 2 \times \frac{b-0}{a-5} = -1 & (AA' \text{与} y=2x \text{垂直}) \end{cases}$$

求解可得:  $a = -3, b = 4$ , 因此选 E。

6、将一批树苗种在一个正方形花园边上, 四角都种, 如果每隔 3 米种一棵, 那么剩下 10 棵树苗; 如果每隔 2 米种一棵, 那么恰好种满正方形的 3 条边, 则这批树苗有 ( ) 棵。

A.54    B.60    C.70    D.82    E.94

【答案】D

【详解】设正方形的边长为  $x$

由已知可得方程  $\frac{4x}{3} + 10 = \frac{3x}{2} + 1$

求解得  $x = 54$

故树苗有  $\frac{54 \times 4}{3} + 10 = 82$ , 选 D。

7、在分别标记 1,2,3,4,5,6 的 6 张卡片, 甲抽取一张, 乙从余下的卡片中再抽取 2 张, 乙的

卡片数字之和大于甲的卡片数字的概率为 ( )

- A.  $\frac{11}{60}$       B.  $\frac{13}{60}$       C.  $\frac{43}{60}$       D.  $\frac{47}{60}$       E.  $\frac{49}{60}$

【答案】D

【解析】样本空间  $\Omega = C_6^1 \times C_5^2$

事件 A: 反面考虑, 穷举法

甲抽 6, 乙有 (5,1); (4,2); (4,1); (3,1); (3,2); (1,2) 共 6 种

甲抽 5, 乙有 (4,1); (3,1); (3,2); (1,2) 共 4 种

甲抽 4, 乙有 (3,1); (1,2) 共 2 种

甲抽 3, 乙有 (1,2) 共 1 种

综上事件  $\bar{A} = 6 + 4 + 2 + 1 = 13$  种,  $1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{13}{C_6^1 + C_5^2} = \frac{47}{60}$ , 选 D。

8、10 名同学的语文和数学成绩如表

语文成绩	90	92	94	88	86	95	87	89	91	93
数学成绩	94	88	96	93	90	85	84	80	82	98

语文和数学成绩的均值分别为  $E_1$  和  $E_2$ , 标准差分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 则

- A.  $E_1 > E_2, \sigma_1 > \sigma_2$       B.  $E_1 > E_2, \sigma_1 < \sigma_2$       C.  $E_1 > E_2, \sigma_1 = \sigma_2$   
 D.  $E_1 < E_2, \sigma_1 > \sigma_2$       E.  $E_1 < E_2, \sigma_1 < \sigma_2$

【答案】B

【详解】简化两组数据, 以 90 为基数, 如下:

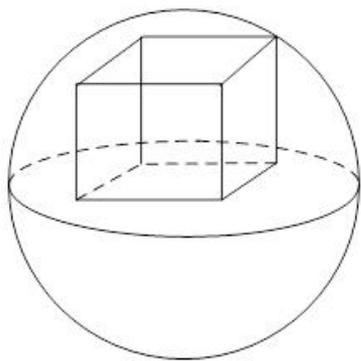
语文: 0, 2, 4, -2, -4, 5, -3, -1, 1, 3, 平均值:  $\frac{5}{10} = 0.5$ , 故  $E_1 = 90.5$

数学: 4, -2, 6, 3, 0, -5, -6, -10, -8, 8, 平均值: -1, 故  $E_2 = 89$

因此:  $E_1 > E_2$ , 观察两组数据的稳定性可知: 语文较数学稳定, 因此  $\sigma_1 > \sigma_2$ , 选 B。

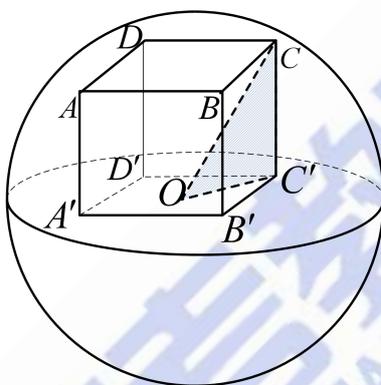
9、如图, 正方体位于半径为 3 的球内, 且一面位于球的大圆上, 则正方体表面积最大为 ( )

- A.12      B.18      C.24      D.30      E.36



【答案】E

【解析】欲使正方体的表面积最大，正方体与球的位置关系如下图：



面  $A'B'C'D'$  在过球心的大圆上，点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、在球面上

球心  $O$  与球面上一点  $C$  连接即为半径： $OC=3$

在  $\triangle OCC'$  中利用勾股定理，设正方体边长为  $a$

$$a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = 3^2 \rightarrow a = \sqrt{6}$$

故正方体表面积  $S = 6a^2 = 36$ ，选 E。

10、某中学的 5 个学科各推荐 2 名教师作为支教候选人，若从中选出来自不同学科的 2 人参加支教工作，则不同的选派方式有( )种

A. 20    B. 24    C. 30    D. 40    E. 45

【答案】D

【详解】设 5 个学科的人分别为  $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee$ ，现从 10 人中选 2 人，2 人来自不同学科，

反面考虑： $\Omega = C_{10}^2$ ；

反面即为来自同一学科  $C_5^1 = 5$ ；

故共有  $C_{10}^2 - 5 = 40$  种，选 D。

11、某单位要铺设草坪，若甲、乙两公司合作需 6 天完成，工时费共 2.4 万元。若甲公司单

独做 4 天后由乙公司接着做 9 天完成，工时费共计 2.35 万元。若由甲公司单独完成该项目，则工时费共计 ( ) 万元

- A.2.25      B.2.35      C.2.4      D.2.45      E.2.5

【答案】E

【详解】设甲乙的工作效率分别是  $x, y$

甲乙每天的工时费分别是  $a, b$

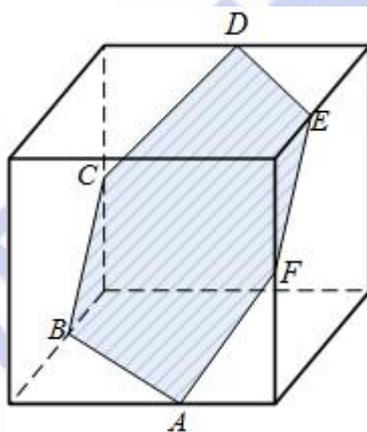
由已知可得方程组如下：

$$\begin{cases} 6x + 6y = 1 \\ 4x + 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} 6a + 6b = 2.4w \\ 4a + 9b = 2.35w \end{cases} \Rightarrow a = 0.25w$$

故甲单独做的工时费为  $10 \times 0.25w = 2.5w$ ，选 E。

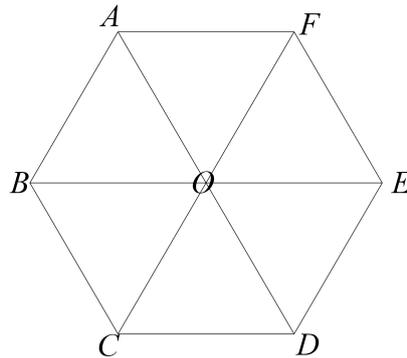
12、如图，六边形 ABCDEF 是平面与棱长为 2 的正方体所截得到的，若 A, B, D, E 分别为相应棱的中点，则六边形 ABCDEF 的面积为 ( )



- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $2\sqrt{3}$       D.  $3\sqrt{3}$       E.  $4\sqrt{3}$

【答案】D

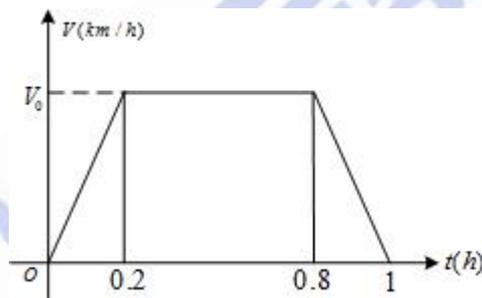
【详解】六边形 ABCDEF 从正方体中拿出如下图：O 为球心



由勾股定理可得： $DE = AB = \sqrt{2}$ ,  $OD = \sqrt{2}$ ，同理： $OE = OA = OB = \sqrt{2}$ ，因此 ABCDEF 为正六边形，由 6 个等边三角形组成，即

$$S_{ABCDEF} = 6 \times S_{\triangle OAB} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{3}，选 D。$$

13、货车行驶 72km 用时 1 小时，速度  $V$  与行驶时间  $t$  的关系如图所示，则  $V_0 =$



- A. 72    B. 80    C. 90    D. 85    E. 100

【答案】C

【详解】如图，梯形的面积即为货车行驶的路程，梯形的高即为  $V_0$ ，因此

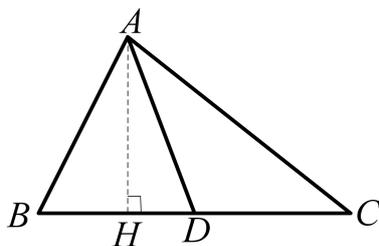
$$S = \frac{[(0.8 - 0.2) + 1] \times V_0}{2} = 72，解得  $V_0 = 90$ ，选 C。$$

14、在三角形 ABC 中， $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ ，D 为 BC 的中点，则  $AD =$  ( )

- A.  $\sqrt{11}$     B.  $\sqrt{10}$     C. 3    D.  $2\sqrt{2}$     E.  $\sqrt{7}$

【答案】B

【详解】过 A 作 BC 的高 AH, 设  $BH = x$ , 则  $CH = 8 - x$ 。



在  $Rt\triangle ABH$  中,  $AH = \sqrt{4^2 - x^2}$ , 在  $Rt\triangle AHC$  中,  $AH = \sqrt{6^2 - (8-x)^2}$ ,  $AH = AH$ , 得  $\sqrt{4^2 - x^2} = \sqrt{6^2 - (8-x)^2}$ , 解得  $x = \frac{11}{4}$ , 则  $DH = BD - BH = 4 - \frac{11}{4} = \frac{5}{4}$ .

在  $Rt\triangle AHD$  中, 由勾股定理得:  $AH^2 + DH^2 = AD^2$ , 其中  $DH^2 = \frac{25}{16}$ ,

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 4^2 - \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{(16-11)(16+11)}{16} = \frac{135}{16}, \text{ 代入解得 } AD = \sqrt{10}, \text{ 选 B.}$$

15、设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 0, a_{n+1} - 2a_n = 1$ , 则  $a_{100} = ( \quad )$

- A.  $2^{99} - 1$       B.  $2^{99}$       C.  $2^{99} + 1$       D.  $2^{100} - 1$       E.  $2^{100} + 1$

【答案】A

【详解】构造等比数列:  $a_{n+1} - 2a_n = 1$  有  $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ,

令  $a_{n+1} + t = 2(a_n + t) \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n + t$ ,  $\therefore t = 1 \therefore a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1) \therefore \{a_n + 1\}$  是以

$a_1 + 1 = 1$  为首项, 公比为 2 的等比数列, 因此通项公式为  $a_n + 1 = 1 \cdot 2^{n-1} \rightarrow a_{100} = 2^{99} - 1$ ,

选 A。

二. 条件充分性判断: 第 16-25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分。

要求判断每题给出的条件 (1) 和 (2) 能否充分支持题干所陈述的结论 A、B、C、D、E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 请在答题卡上将所选的字母涂黑。

- (A) 条件 (1) 充分, 但条件 (2) 不充分
- (B) 条件 (2) 充分, 但条件 (1) 不充分
- (C) 条件 (1) 和 (2) 都不充分, 但联合起来充分
- (D) 条件 (1) 充分, 条件 (2) 也充分
- (E) 条件 (1) 不充分, 条件 (2) 也不充分, 联合起来仍不充分

16、甲、乙、丙三人各自拥有不超过 10 本图书, 甲再购入 2 本图书后, 他们拥有的图书量构成等比数列, 则能确定甲拥有图书的数量

- (1) 已知乙拥有的图书数量
- (2) 已知丙拥有的图书数量

【答案】C

【详解】显然单独不充分, 考虑联合。设甲乙丙三人的图书量分别为  $a, b, c$  ( $a, b, c$  均是小于

等于 10 的正自然数), 由题干可得:  $a + 2, b, c$  成等比数列, 若三者相等, 则是常数列,

显然充分; 非常数列有 1,2,4; 2,4,8; 3,6,12; 1,3,9。若乙丙是 3,6,12 或 1,3,9 里的任意两个数, 由等比中项定理, 那么甲是确定的; 若乙丙数量为 2,4 时,  $a + 2$  (至少为 2) 为 1 或 8, 显然只能是 8。综上, 联合充分。选 C。

17、有甲乙两袋奖券, 获奖率分别为  $p$  和  $q$ , 某人从两袋中各随机抽取 1 张奖券, 则此人获奖的概率不小于  $3/2$

(1) 已经  $p + q = 1$

(2) 已知  $pq = \frac{1}{4}$

【答案】D

【详解】由题干可得此人获奖的概率为  $1 - (1 - p)(1 - q)$  (反面考虑)

化简如下:  $1 - (1 - p)(1 - q) = 1 - (1 - p - q + pq) = p + q - pq$

条件 (1)  $p + q = 1$ , 即概率为  $1 - pq$ , 由均值可得:

$$pq \leq \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \rightarrow pq \leq \frac{1}{4} \rightarrow \text{概率} \geq 1 - \frac{1}{4}, \text{充分};$$

条件 (2)  $pq = \frac{1}{4}$ , 即概率为  $p + q - \frac{1}{4}$ , 由均值可得

$$p + q \geq 2\sqrt{pq} \rightarrow p + q \geq 1 \rightarrow \text{概率} \geq 1 - \frac{1}{4}, \text{充分, 选 D.}$$

18、直线  $y = kx$  与圆  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$  有两个交点

(1)  $-\frac{\sqrt{3}}{3} < k < 0$

(2)  $0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

【详解】圆化为标准方程:  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ , 圆心为  $(2, 0)$ , 半径为 1, 欲使直线与圆有 2

个交点, 即相交关系, 故圆心到直线的距离  $d < r$ ,

$$d = \frac{|2k - 0|}{\sqrt{k^2 + 1}} < 1, \text{两边平方整理可得 } -\frac{\sqrt{3}}{3} < k < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

条件 (1) 是题干的子集, 充分;

条件(2)不是题干的子集,不充分,选A。

19、能确定小明年龄

- (1) 小明年龄是完全平方数  
(2) 20年后小明年龄是完全平方数

【答案】C

【详解】单独两个条件显然不充分,完全平方数,列举如下:

0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,...

观察可发现相邻两个完全平方数之差成等差数列,首项为1,公差为2,因此相差为20的两个完全平方数必出现在100之前,只有16和36,因此小明是16岁,充分。

20、关于 $x$ 的方程 $x^2 + ax + b = 1$ 有实根

- (1)  $a + b = 0$   
(2)  $a - b = 0$

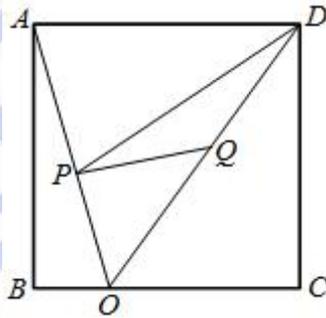
【答案】D

【详解】一元二次方程根的判别式 $\Delta = a^2 - 4(b - 1)$ ,

条件(1)  $a + b = 0 \rightarrow a = -b \rightarrow \Delta = b^2 - 4(b - 1) = (b - 2)^2 \geq 0$ ,充分;

条件(2):  $a - b = 0 \rightarrow a = b \rightarrow \Delta = b^2 - 4(b - 1) = (b - 2)^2 \geq 0$ ,充分,选D。

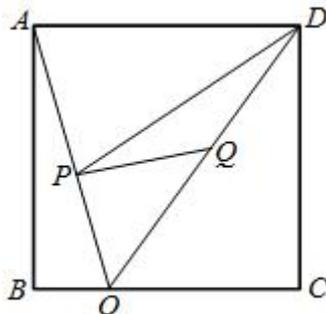
21、如图,已知正方形ABCD面积, O为BC上一点, P为AO的中点, Q为DO上一点, 则能确定三角形PQD的面积。



- (1) O为BC的三等分点  
(2) Q为DO的三等分点

【答案】B

【详解】如图 $\Delta AOD$ 的面积恒定,与点O的具体位置无关,



$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} AD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC$$

故  $\Delta POD$  的面积也恒定, 点  $P$  为  $AO$  的中点, 所以  $S_{\Delta POD} = \frac{1}{2} S_{\Delta AOD}$ 。

条件(1)不充分, 条件(2):  $Q$  是  $DO$  的三等分点, 因此  $S_{\Delta PQD} = \frac{1}{3} S_{\Delta POD} = \frac{1}{6} S_{\Delta AOD} = \frac{1}{12}$ ,

选 B。

22、设  $n$  为正整数, 则能确定  $n$  除以 5 的余数

(1) 已知  $n$  除以 2 的余数

(2) 已知  $n$  除以 3 的余数

【答案】E

【详解】举反例

条件(1)如余数为 0, 即  $n$  为 2, 4, 6, 8, 10..., 显然推不出题干, 不充分;

条件(2)如余数为 0, 即  $n$  为 3, 6, 9, 12, 15... 显然不充分;

条件(1) + (2) 举反例: 如余数为 0, 即  $n$  为 6 的倍数, 如 6, 12, 18..., 也不充分, 选 E。

23、某校理学院五个系每年录取人数如下表:

系数	数学系	物理系	化学系	生物系	地学系
录取人数	60	120	90	60	30

今年与去年相比, 物理系平均分没变, 则理学院录取平均分升高了。

(1) 数学系录取平均分升高了 3 分, 生物系录取平均分降低了 2 分

(2) 化学系录取平均分升高了 1 分, 地学系录取平均分降低了 4 分

【答案】C

【详解】显然两个条件都不充分, 条件(1)+条件(2), 数学系比去年多了  $60 \times 3$  分, 物理系不变, 化学系多了  $90 \times 1$  分, 生物系少了  $60 \times 2$  分, 地学系少了  $30 \times 4$  分, 故  $60 \times 3 + 90 \times 1 - 60 \times 2 - 30 \times 4 = 30$  分, 平均分升高, 充分, 选 C。

24、设三角区域  $D$  由直线  $x + 8y - 56 = 0$ ,  $x - 6y + 42 = 0$  与  $kx - y + 8 - 6k = 0 (k < 0)$  围成,

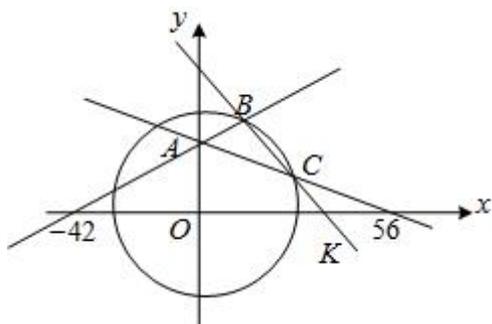
则对任意的  $(x, y)$ ,  $\lg(x^2 + y^2) \leq 2$

(1)  $k \in (-\infty, -1]$

(2)  $k \in \left[-1, -\frac{1}{8}\right)$

【答案】A

【详解】



题干中给出三条直线，其中两条直线已经确定，只有  $kx - y + 8 - 6k = 0$  是变化直线。这条直线与  $k$  相关，简单处理一下  $(x-6)k + (8-y) = 0$ ，恒过定点  $(6,8)$ 。随着  $k$  的变化，直线绕着  $(6,8)$  转动，要想满足  $\lg(x^2 + y^2) \leq 2$ ，即  $x^2 + y^2 \leq 100$ ，即区域上的点到原点的距离必须小于 10。所以整个区域必须在以  $O$  为原点，半径为 10 的圆上或圆内。只需保证三角形区域的三个顶点在圆内或圆上即可。而三角形的区域已有 2 个点  $A(0,7), B(6,8)$  确定。只需第三个点  $C$  也在圆内即可。

$$\text{联立} \begin{cases} x + 8y - 56 = 0 \\ kx - y + 8 - 6k = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{48k-8}{8k+1}, \frac{50k+8}{8k+1}\right)$$

$$\begin{aligned} |\text{OC}| \leq 10 &\Rightarrow \left(\frac{48k-8}{8k+1}\right)^2 + \left(\frac{50k+8}{8k+1}\right)^2 \leq 100 \\ \text{即} & \\ &\Rightarrow k \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{57}, +\infty\right) \end{aligned}$$

$$\text{而 } k < 0 \therefore k \in (-\infty, -1]$$

即结论等价于  $\therefore k \in (-\infty, -1]$ ，(1)充分，(2)不充分，选 A。

备注：考试时间紧张，也可以直接从条件出发，找临界点，当  $k=-1$  时， $C$  点恰好在以  $O$  为圆心，半径为 10 的圆周上，此时只能顺时针转动， $\therefore k \in (-\infty, -1]$ ，因此条件 (1) 充分，条件 (2) 不充分。

25、设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $s_n$ ，则  $\{a_n\}$  等差。

$$(1) s_n = n^2 + 2n, n = 1, 2, 3$$

$$(2) s_n = n^2 + 2n + 1, n = 1, 2, 3$$

【答案】A

【解析】等差数列的前  $n$  项和公式为  $S_n = An^2 + Bn$ ， $A, B$  为全体实数，因此条件 (1) 充

分，条件（2）不充分，选 A。

