2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当 $x \to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$

（A）1.　　（B）2.

（C）3.　　（D）4.

【答案】C

【解析】 $x-\tan x = x-(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)) \sim -\frac{1}{3}x^3$, 故 $k=3$.

（2）设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, x\le 0, \\ xlnx, x>0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

A.可导点，极值点.　　B.不可导点，极值点.

C.可导点，非极值点.　　D.不可导点，非极值点.

【答案】B

【解析】. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x|x|}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x\ln x}{x}=-\infty$, 故 $f(x)$ 不可导.

当 $x>0$ 时， $f(x)<0$; 当 $x<0$ 时， $f(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值.故选（B）.

（3）设 $\{u_n\}$ 是单调递增的有界数列，则下列级数中收敛的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{u_n}{n}$.　　B. $\sum\limits_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{1}{u_n}$.

C. $\sum\limits_{n=1}^{m}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$.　　D. $\sum\limits_{n=1}^{m}(u_{n+1}^2-u_n^2)$

【答案】C

【解析】举反例：（A） $u_n=\frac{n-1}{n}$ （B） $u_n=\frac{n-1}{n}$ （C） $u_n=-\frac{1}{n}$

（4）设函数 $Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$.如果对上半平面 $(y>0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有

$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，那么函数 $P(x,y)$ 可取为

A. $y-\dfrac{x^2}{y^3}$.　　B. $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$.

C. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$.　　D. $x-\dfrac{1}{y}$

【答案】D

【解析】$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}$, 又上半平面含 $\dfrac{1}{x}$, 有零，故（C）错，选（D）.

（5）设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$,且 $|A|=4$,则二次型 x^TAx 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】C

【解析】$\because A^2+A=2E$,设 A 的特征值为 λ

$$\therefore \lambda^2+\lambda=2$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1)=0$$

$$\therefore \lambda=-2或1$$

$$\because |A|=4$$

$$\therefore A的特征值为\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=1 \therefore q=2,p=1$$

$$\therefore X^TAx 的规范形为 y_1{}^2-y_2{}^2-y_3{}^2$$

（6）如图所示，有 3 张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z+d_i$ (i=1,2,3)

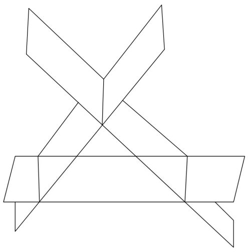
组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$，则

A. $r(A)=2,\mathrm{r}(\overline{A})=3$

B. $r(A)=2,\mathrm{r}(\overline{A})=2$

C. $r(A)=1, \mathrm{r}(\overline{A})=2$

D. $r(A)=1, \mathrm{r}(\overline{A})=1$



【答案】C

【解析】(1) 令 $\pi_i = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = di, i=1,2,3$

由于 π_1,π_2,π_3 无公共交点，则 $r(A) < r(\overline{A})$，故 B、D 排除

(2) 由 (1) 分析可知，$r(A) \le 2$，且 $A \ne 0$，则 $1 \le r(A) \le 2$

以 π_1 和 π_2 为例，由于 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \end{cases}$ 的公共解为一条直线

则 $3 - r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = 1$

即 $r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = 2$

因此 $r(A) = r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 2$. $r(\overline{A}) = 3$

综上 A 正确

(7) 设 A, B 为随机事件，则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是

A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

B. $P(AB) = P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$

D. $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$

【答案】C

【解析】 A选项 $\Leftrightarrow P(AB) = 0$,故 A 排除

B选项 $\Leftrightarrow A$、B 独立，故 B 排除

C选项 $\Leftrightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$

而$P(A)=P(B)$，故 C 正确

D选项 $\Leftrightarrow P(AB)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

$\Leftrightarrow 1=P(A)+P(B)$ 故 D 排除

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.则 $P\{|X-Y|<1\}$

A.与 μ 无关，而与 σ^2 有关.　　B. 与 μ 有关，而与 σ^2 无关.

C. 与 μ,σ^2 都有关.　　D. 与 μ,σ^2 都无关.

【答案】A

【解析】X,Y 独立，服从正态分布，则 $z=x-y\sim N(\sigma,2\sigma^2)$

$$P(|X-Y|<1)=P(-1<Z<1)=P(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}<\frac{Z}{\sqrt{2}\sigma}<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})$$

$=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-1$，故 A 正确

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(u)$ 可导，　$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________

【答案】$\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)+y$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)\cos y+x$$

故

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(\sin y-\sin x)+\frac{y}{\cos x}+f'(\sin y-\sin x)+\frac{x}{\cos y}$$

$$=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$$

(10) 微分方程 $2yy^2-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$________

【答案】$y=\sqrt{3e^x-2}$

【解析】$y'=\dfrac{2+y^2}{2y}$

$$\int\frac{2y}{2+y^2}dy=\int 1dx \text{ 故 } \ln(2+y^2)=x+C.$$

由 $y(0)=1$ 得 $C=\ln 3$

则 $\ln(2+y^2)=x+\ln 3$.故 $e^{\ln(2+y^2)}=e^{x+\ln 3}$

即 $2+y^2=3e^x$ 故 $y=\sqrt{3e^x-2}$

(11) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$________

【答案】$\cos\sqrt{x}$

【解析】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}$

(12) 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geq 0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{z}\sqrt{4-x^2-4z^2}dxdy=$________

【答案】$\dfrac{32}{3}$

【解析】

$$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}dxdy=\iint\limits_{Dxy}|y|dxdy=4\iint\limits_{D'}ydxdy=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r^2\sin\theta dr=\frac{32}{3}$$

（13）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为三阶矩阵，若 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$。则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为________

【答案】$x=k\left(1,-2,1\right)^T,k\in R$

【解析】$\because d_1,d_2$ 无关，$A=(d_1,d_2,d_3)$

$\therefore r(A)\geq 2$

$\because d_3=-d_1+2d_2$

$\therefore r(A)=2$

$\therefore Ax=0$ 的基础解系中有 $n-r(A)=3-2=1$ 个解向量.

$\because d_1-2d_2+d_3=0$

$\therefore (1,-2,1)^T$ 为 $Ax=0$ 的解为基础解系.

$\therefore$ 通解为 $x=k(1,-2,1)^T,k\in R$

（14）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2},0<x<2,\\ 0,\text{其他},\end{cases}$，$F(x)$ 为 X 的分布函数，EX 为 x 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$________

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & ,0<x<2\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_0^x \frac{t}{2}dt & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$P(F(x)>E(x)-1)=P(F(x)>\frac{1}{3})$$

$$=P(\frac{x^2}{4}>\frac{1}{3})=P(x>\frac{2}{\sqrt{3}})=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}dx=\frac{2}{3}$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

（1）求 $y(x)$

（2）求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点

【答案】（1） $y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ （2） $(-\infty,-\sqrt{3}),(0,\sqrt{3})$ 函数 $y(x)$ 是凸的，在 $(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},+\infty)$ 函数 $y(x)$ 是凹的，$\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right),(0,0),\left(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ 为拐点

【解析】（1）

$$y(x)=e^{-\int xdx}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\int xdx}dx+c\right)$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx+c\right)$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}(x+c)$$

由 $y(0)>0$，得 $c=0$，故 $y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

（2）

$y'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y''(x)=-2xe^{-\frac{x^2}{2}}+(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)$

$=(-2x-x+x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$

列表

y	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	-	0	+	0	-	0	+
y	凸		凹		凸		凹

故在$(-\infty,-\sqrt{3}),(0,\sqrt{3})$函数$y(x)$是凸的，在$(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},+\infty)$函数$y(x)$是凹的，由$y(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}},y(\sqrt{3})=\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}},y(0)=0$，由拐点判别定理得$\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right),(0,0),\left(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$为拐点。

（16）（本题满分 10 分）设a,b为实数，函数$z=2+ax^2+by^2$在点（3，4）处的方向导数中，沿方向$l=-3i-4j$的方向导数最大，最大值为 10.

（1）求a,b；

（2）求曲面$z=2+ax^2+by^2\ (z\geq 0)$的面积；

【答案】（1）$a=b=-1$（2）$\frac{13}{3}\pi$

【解析】（1）由题意可知

$grad|_{(3,4)}=\{+2ax,2by\}|_{(3,4)}=\{6a,8b\}$

得$\frac{6a}{-3}=\frac{8b}{-4}$，得$a=b$，且方向导数最大为$\sqrt{36a^2+64b^2}=10$（与梯度方向相同，方向导数最大），故$a=b=-1$.

$Z=2-x^2-y^2$

（2）

$$S=\iint_{\Sigma}1ds$$
$$=\iint_{D}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy \qquad D:x^2+y^2\le 2$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr$$
$$=\frac{1}{8}2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}d\left(1+4r^2\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}\frac{2}{3}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\pi}{6}(27-1)=\frac{26\pi}{6}=\frac{13}{3}\pi$$

（17）（本题满分 10 分）求曲线 $y=e-x\sin x(x\ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积

【答案】

【解析】所求面积 $A=\int_0^{+\infty}\left|e^{-x}\sin x\right|dx$。

$$\int_0^{+\infty}\left|e^{-x}\sin x\right|dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin xdx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)\right]\Bigg|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\left[e^{-(k+1)\pi}(-1)^{k+1}-e^{-k\pi}(-1)^k\right]$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}e^{-k\pi}+e^{-(n+1)\pi}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{2}{e^{\pi}-1}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}$$

（18）（本题满分 10 分）设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\ \ (n=1,2,3\ldots)$

（1）证明：$\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}.a_{n-2}\ \ (n=2,3\ldots)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

【答案】（1） $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3,\cdots\right)$ （2） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\left(n为奇\right)\\ \frac{2}{\pi}\left(n为偶\right)\end{cases}$

【解析】 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

（1）令 $x=\sin t$，则

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n t\cos^2 tdt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n t\left(1-\sin^2 t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+2} tdt$$

$$=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{\pi}{2}-\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{\pi}{2}\left(n为偶\right)\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}-\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}\left(n为奇\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{\pi}{2}\left(n为偶\right)\\ \frac{1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}\left(n为奇\right)\end{cases}$$

n 为奇数， $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+3}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}}=\frac{n\left(n+2\right)}{\left(n+3\right)\left(n+1\right)}\cdot\frac{\pi}{2}<1$；

n 为偶数， $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+3}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}}=\frac{n\left(n+2\right)}{\left(n+3\right)\left(n+1\right)}\cdot\frac{2}{\pi}<1$；

故 $\left\{a_n\right\}$ 单调减少。

n 为偶数时， $\frac{a_n}{a_{n-2}}=\frac{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{\pi}{2}}=\frac{n-1}{n+2}$；

n 为奇数时， $\frac{a_n}{a_{n-2}}=\frac{\frac{1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}}{\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}}=\frac{n-1}{n+2}$；

故 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3,\cdots\right)$

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)}\cdot\dfrac{\pi}{2}(n为奇)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)}\cdot\dfrac{2}{\pi}(n为偶)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(n为奇)\\ \dfrac{2}{\pi}(n为偶)\end{cases}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\pi}{2}(n为偶)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{\pi}(n为奇)$$

（19）（本题满分 10 分）设Ω是由锥面$x^2+(y-z)^2-(1-z)^2(0\le z\le 1)$与平面$z<0$围成的椎体，求$\Omega$的形心坐标。

【答案】

【解析】由题意可知，$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}zdv}{\iiint\limits_{\Omega}1dv}=0$，$\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}ydv}{\iiint\limits_{\Omega}1dv}=0$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}zdv}{\iiint\limits_{\Omega}1dv}=0$。

$$\iiint\limits_{\Omega}1dv=\int_0^1dt\iint\limits_{D}1dxdy=\int_0^1\pi(1-z)^2dz=\frac{\pi}{3}$$

其中 $\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^1zdz\iint\limits_{D}1dxdy=\int_0^1\pi z(1-z)^2dz=\dfrac{\pi}{12}$

$$\iiint\limits_{\Omega}ydv=\int_0^1dz\iint\limits_{x^2+(y-2)^2\le(1-z)^2}ydxdy$$

$$\iint\limits_{x^2+(y-2)^2\le(1-z)^2}ydxdy=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{1-z}(2+rsin\theta)rdr$$

令$\begin{cases}x=rcos\theta\\ y=2+rsin\theta\end{cases}$，则

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(r^2+r^3\frac{sin\theta}{3})|_0^{1-z}\,d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-z)^2+\frac{(1-z)^3}{3})sin\theta d\theta$$

$$=2\pi(1-z)^2$$

$\iiint\limits_{\Omega} y dv = \int_0^1 2\pi(1-z)^2 dz = \frac{2\pi}{3}(z-1)^3 |_0^1 = \frac{2\pi}{3}$;

故 $\bar{y} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2, \bar{z} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}, \bar{x} = 0$

（20）（本题满分 11 分）已知向量组

$(\mathrm{I})\alpha_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}, (\mathrm{II})\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$，若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价，求 α 的取值，并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

【答案】

【解析】$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 2\\4 & 4 & a^2+3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & a^2-1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 2 & 3\\a+3 & 1-a & a^2+3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 2\\0 & 1-a & a^2-a\end{bmatrix}$，所以 $a=1$.

$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 2 & 3\\4 & 4 & 4 & 4\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，所以 $\beta_3 = k\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}, k \in R.$

所以 $\beta_3 = (-k-1)\alpha_1 + k\alpha_2 + 2\alpha_3, k \in R.$

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A = \begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\\2 & x & -2\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & y\end{bmatrix}$ 相似，

（1）求 x, y；

（2）求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$；

【答案】（1） $x=3,y=-2$；（2） $P=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$

【解析】（1） $A\sim B\Rightarrow\begin{cases}trA=trB\\|A|=|B|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=4\\x-y=5\end{cases}$，即$x=3,y=-2$

（2） $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=0\Rightarrow A,B$的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-2$

当$\lambda_1=2$时，由$(2E-A)x=0,(2E-B)x=0$可得A、B属于特征值$\lambda_1=2$

的线性无关的特征向量分别为$\alpha_1=(-1,2,0)^T,\beta_1=(1,0,0)^T$；

当$\lambda_2=-1$时，由$(-E-A)x=0,(-E-B)x=0$可得A、B属于特征值$\lambda_2=-1$

的线性无关的特征向量分别为$\alpha_2=(-2,1,0)^T,\beta_2=(-1,3,0)^T$；

当$\lambda_3=-2$时，由$(-2E-A)x=0,(-2E-B)x=0$可得A、B属于特征值$\lambda_3=-2$

的线性无关的特征向量分别为$\alpha_3=(-1,2,0)^T,\beta_3=(0,0,1)^T$；

令 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则

$$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}\Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$$

故令 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$，即 $P^{-1}AP=B$.

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p,P\{Y=1\}=1-p$.令 $Z=XY$

（1）求 Z 的概率密度；

（2） p 为何值时， X 与 Z 不相关；

（3） X 与 Z 是否相互独立；

【答案】

【解析】（1）

$$F_Z(z)=P(XY\le z)=P(XY\le z,Y=-1)+P(XY\le z,Y=1)$$

$$=P(-X\le z)P(Y=-1)+P(X\le z)P(Y=1)$$

$= pP(X \ge -z) + (1-p)P(X \le z)$

$= p(1 - F_X(-z)) + (1-p)F_X(z)$

因为 $f_X(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，$f_X(-z) = \begin{cases} e^{z}, & z<0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

所以 $f_Z(z) = pf_X(-z) + (1-p)f_X(z)$ $f_z(z) = \begin{cases} (1-p)e^{-z}, & z>0 \\ pe^{z}, & z<0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

（2）$\operatorname{cov}(X,Z)=0, \operatorname{cov}(X,XY)=0,$

由于 $\operatorname{cov}(X,XY) = E(X^2Y) - EXEXY = EX^2EY - (EX)^2EY = EYDX,$

则 $\operatorname{cov}(X,XY) = 1-2p$. 由 $1-2p=0$, 可知当 $p=\frac{1}{2}$ 时，X 与 Z 不相关.

（3）X 与 Z 不独立.

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & ,x \ge \mu \\ 0 & ,x < \mu \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$X_1, X_2, ..., X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量；

【解析】(1)根据概率密度归一性，有

$$\int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

设 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$，则 $\int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^{+\infty} Ae^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}A = 1$，则 $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

(2) 似然函数 $L(\sigma) = \frac{A^n}{\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，取对数 $\ln(L(\sigma)) = n\ln A - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

对σ^2求导有，$\frac{d\left(\ln\left(L(\sigma)\right)\right)}{d\left(\sigma^2\right)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{2\left(\sigma^2\right)^2}=0$则$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$，则$\sigma^2$的最大似然估计量为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$。