数学三测试卷解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \tan t^2 dt}{x^3}, & x\neq 0,\\ k, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $k=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{3}$.　　（B）$\dfrac{1}{6}$.　　（C）0.　　（D）3.

【答案】（A）

【解析】由已知及洛必达，得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \tan t^2 dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}=k.$ 故选（A）.

（2）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n x+\cos^n x}(0\le x\le \dfrac{\pi}{2}),$ 则 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内不可导的个数为（　　）

（A）3.　　（B）2.　　（C）1.　　（D）0.

【答案】（C）

【解析】由夹逼准则得 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ \sin x, & \dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ 再结合导数定义可知 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处不可导，故选（C）.

（3）下列级数中发散的是（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\dfrac{\pi}{3n}$.　　（B）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n}$.　　（D）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

【答案】（B）

【解析】$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 是交错级数，但不满足单调不减性，故不能用莱布尼茨判别法.由

$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}$，知该级数为一个条件收敛与一个发散的调和级数之差，因此，该级数发散.

（4）设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\sin x}dx,$ 则（　　）

（A）$I_2 > 1 > I_1$.　（B）$I_2 > I_1 > 1$.　（C）$1 > I_2 > I_1$.　（D）$1 > I_1 > I_2$.

【答案】（B）

【解析】当 $x>0$ 时，$x > \sin x, \dfrac{x}{\sin x} > 1 > \dfrac{\sin x}{x}$, 所以 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} dx < I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{\sin x} dx$,

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \dfrac{2}{\pi} x$, 即 $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{2}{\pi}$, 故 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{2}{\pi} dx = 1$, 故选（B）.

（5）设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, B 是 3 阶矩阵，$r(B)=2, r(AB)=1$, 则 $k=$（　　）

（A）1.　（B）-1.　（C）2.　（D）-2.

【答案】（B）

【解析】由已知，有 $1 = r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\} \le 2$, 故 $r(A) < 3$.

又由于 $A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 3 & k+2 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{bmatrix}$, 故 $k=-1$.

（6）设 n 维列向量组（Ⅰ）$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m (m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组（Ⅱ）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关的充分必要条件为（　　）

（A）向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表示

（B）向量组（Ⅱ）可由向量组（Ⅰ）线性表示

（C）矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ 等价

（D）向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）等价

【答案】（C）

【解析】因为 A 与 B 等价，有 $r(A)=r(B)=m$, 所以 B 的 m 个列向量线性无关.

当向量组（Ⅱ）线性无关时，矩阵 A 与 B 均等价与 $\begin{bmatrix} E_m \\ O \end{bmatrix}$，故 A 与 B 等价.

（7）设袋中有 6 只红球、4 只白球，任意摸出一只球，记住颜色后放回袋中，共进行 4 次，设 X 表示摸到红球的次数，则 $EX=$（　　）

（A）$\dfrac{12}{5}$.　（B）$\dfrac{2}{5}$.　（C）$\dfrac{8}{5}$.　（D）$\dfrac{48}{5}$.

【答案】（A）

【解析】本题为有放回摸球，故每次摸到红球的概率为 $\dfrac{3}{5}$，所以 $X \sim B(4, \dfrac{3}{5})$, 故

$EX = np = 4\times\frac{3}{5} = \frac{12}{5}.$

（8）设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且都服从 $N(0,1)$, 已知 $Y = \frac{X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}}{X_3^{\ 2}+X_4^{\ 2}}$, 对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 数 y_α 满足 $P\{Y>y_\alpha\}=\alpha$, 则有（　　）

（A）$y_\alpha y_{1-\alpha}=1.$　（B）$y_\alpha y_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.$　（C）$y_{\frac{\alpha}{2}} y_{1-\alpha}=1.$　（D）$y_{\frac{\alpha}{2}} y_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.$

【答案】（A）

【解析】$X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}\sim\chi^2(2), X_3^{\ 2}+X_4^{\ 2}\sim\chi^2(2),$

因此 $Y=\frac{X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}}{X_3^{\ 2}+X_4^{\ 2}}=\frac{\frac{X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}}{2}}{\frac{X_3^{\ 2}+X_4^{\ 2}}{2}}\sim F(2,2)$. 因为 $P\{Y>y_\alpha\}=\alpha$, 即 $y_\alpha=F_\alpha(2,2)$, 又

$1-\alpha=1-P\{Y>y_\alpha\}=P\{Y\le y_\alpha\}=P\{Y<y_\alpha\}=P\{\frac{1}{Y}>\frac{1}{y_\alpha}\}$, 而 $\frac{1}{Y}\sim F(2,2)$, 所以

$y_{1-\alpha}=\frac{1}{y_\alpha}$, 所以（A）正确.

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{e^{f(x)}-1}=1$, 则 $f(x)$ 的极小值为______.

【答案】0

【解析】由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{e^{f(x)}-1}=1$, 知 $\lim\limits_{x\to0}[e^{f(x)}-1]=0$, 即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$.

又由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{e^{f(x)}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{f(x)}=1$, 即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x}{2}}{\frac{f(x)-f(0)}{x}}=1$, 故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{f(x)}=1>0$, 由保号性，$\exists\delta>0,\forall x\in(-\delta,0)\bigcup(0,\delta)$, 有 $\frac{\frac{1}{2}x^2}{f(x)}>0$, 故

$f(x)>0=f(0)$, 所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$.

(10) 定积分 $I=\int_0^{2018}x(x-1)(x-2)\cdots(x-2018)dx=$______.

【答案】0

【解析】令 $x-1009=t$, 则

$$I=\int_{-1009}^{1009}(t+1009)(t+1008)\cdots(t+1)t(t-1)\cdots(t-1008)(t-1009)dt$$
$$=\int_{-1009}^{1009}(t^2-1009^2)(t^2-1008^2)\cdots(t^2-1)tdt=0.$$

（11）设 $y=y(x)$ 满足微分方程 $xy'=xe^x-y$, 且 $y(1)=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$, 则

$y=y(x)=$ ______.

【答案】$\frac{1}{x}[xe^x-e^x+4(\sqrt{2}-1)]$

【解析】将原方程化为 $y'+\frac{1}{x}y=e^x$, 解一阶线性微分方程得 $y=\frac{1}{x}(xe^x-e^x+C)$. 又由于

$y(1)=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx=4(\sqrt{2}-1)$, 从而得 $C=4(\sqrt{2}-1)$, 所以

$y=\frac{1}{x}[xe^x-e^x+4(\sqrt{2}-1)]$.

（12）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有三阶连续导数，且满足 $2f(x)-f(\frac{x}{2})=2(x-x^2)$, 则

$f'''(0)=$ _____.

【答案】0

【解析】由已知等式得 $f(0)=0$.

等式两边同时对 x 求导，得 $2f'(x)-\frac{1}{2}f'(\frac{x}{2})=2(1-2x)$,（*）. 令 $x=0$, 得 $f'(0)=\frac{4}{3}$.

对（*）两边同时对 x 求导，得 $2f''(x)-\frac{1}{4}f''(\frac{x}{2})=-4$,（**）. 令 $x=0$, 得 $f''(0)=-\frac{16}{7}$.

对(**)两边同时对 x 求导，得 $2f'''(x)-\frac{1}{8}f'''(\frac{x}{2})=0$, 令 $x=0$, 得 $f'''(0)=0$.

（13）设 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{4}\\1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$, 则行列式 $\left|(A^{-1})^*\right|=$ ______.

【答案】$-(4!)^3$

【解析】 $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\4&0&0&0\end{bmatrix},\left|(A^{-1})^*\right|=\left|A^{-1}\right|^3=(-4!)^3=-(4!)^3.$

（14）设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, 则方差 $D(\left|X-Y\right|)=$______.

【答案】 $1-\frac{2}{\pi}$

【解析】由已知，X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,\frac{1}{2}),Y\sim N(0,\frac{1}{2})$, 故 $X-Y\sim N(0,1)$.

记 $Z=\left|X-Y\right|$, 则 $D(\left|X-Y\right|)=D(\left|Z\right|)=E(\left|Z\right|^2)-(E\left|Z\right|)^2=E(Z^2)-(E\left|Z\right|)^2$,

而 $E(Z^2)=DZ+(EZ)^2=1,\ E(\left|Z\right|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|z\right|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$, 故 $D(\left|X-Y\right|)=1-\frac{2}{\pi}$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）计算 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt\right]^{\frac{1}{x^3+1-\cos x^2}}$.

【答案】 $e^{\frac{1}{3}}$

【解析】原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[1+\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt]}{x^3+1-\cos x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin[(\sin x)^2]\cos x}{3x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$.

（16）（本题满分 10 分）设 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-4y'+3y=xe^x$, 且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线在 $y=x^2-\frac{1}{4}x+1$ 在该点处的切线重合，求 $y=y(x)$.

【答案】 $\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}-(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x)e^x$

【解析】 $y''-4y'+3y=xe^x$ 的特征方程为 $r^2-4r+3=0$, 得 $r_1=1,r_2=3$. 令特解 $y^*=x(ax+b)e^x$, 将 y^* 代入微分方程得 $-4ax+2a-2b=x$, 故 $a=b=-\frac{1}{4}$, 所以方程的通解为 $y(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}-(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x)e^x$，（$C_1,C_2$ 为任意常数）.又已知有公切线，得 $y(0)=1,y'(0)=-\frac{1}{4}$, 故 $C_1+C_2=1,C_1+3C_2=0$, 解得 $C_1=\frac{3}{2},C_2=-\frac{1}{2}$, 所以方程的通解为 $y(x)=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}-(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x)e^x$.

（17）（本题满分 10 分）函数 $z=f(x,y)$ 的全增量 $\Delta z=(2x-3)\Delta x+(2y+4)\Delta y$, 且

$f(0,0)=0$, 求 $z=f(x,y)$ 在 $D: x^2+y^2\le 25$ 上的最值.

【答案】最小值为 $-\frac{25}{4}$, 最大值为 50

【解析】依题意，有 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-3, \frac{\partial z}{\partial y}=2y+4,\ z=\int(2x-3)dx+\varphi(y)=x^2-3x+\varphi(y).$

又由 $\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(y)=2y+4$, 积分得 $\varphi(y)=y^2+4y+C$, 则 $z=x^2-3x+y^2+4y+C.$

由 $f(0,0)=0$, 得 $C=0$, 故 $f(x,y)=x^2-3x+y^2+4y.$

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-3=0, \frac{\partial z}{\partial y}=2y+4=0$, 得 $x_1=\frac{3}{2}, y_1=-2, f(\frac{3}{2},-2)=-\frac{25}{4}.$

令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-3x+4y+\lambda(x^2+y^2-25)$,

由 $\begin{cases} L'_x=2x-3+2\lambda x=0, \\ L'_y=2y+4+2\lambda y=0, \\ L'_\lambda=x^2+y^2-25=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=-4, \end{cases} f(3,-4)=0, \begin{cases} x_3=-3, \\ y_3=4, \end{cases} f(-3,4)=50,$

所以最小值为 $-\frac{25}{4}$, 最大值为 50.

（18）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(x)>0$.（Ⅰ）证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(b)(\xi-a)+f(a)(b-\xi)$;（Ⅱ）对（Ⅰ）中的 $\xi\in(a,b)$，求 $\lim\limits_{b\to a^+}\frac{\xi-a}{b-a}$.

【答案】（Ⅰ）略（Ⅱ）$\frac{1}{2}$

【解析】（Ⅰ）令 $\varphi(x)=f(b)(x-a)+f(a)(b-x)-\int_a^b f(x)dx(a\le x\le b)$, 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且单调递增，所以 $f(a)<f(x)<f(b), x\in(a,b)$,

且 $f(a)(b-a)<\int_a^b f(x)dx<f(b)(b-a), x\in(a,b)$, 于是 $\varphi(a)<0, \varphi(b)>0$, 由零点定理得 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\varphi(\xi)=0$, 即 $\int_a^b f(x)dx=f(b)(\xi-a)+f(a)(b-\xi).$

（Ⅱ）$\lim\limits_{b\to a^+}\frac{\xi-a}{b-a}=\lim\limits_{b\to a^+}\frac{\int_a^b f(x)dx-f(a)(b-a)}{(b-a)[f(b)-f(a)]}=\lim\limits_{b\to a^+}\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)f'(b)+f(b)-f(a)}$

$$=\lim_{b\to a^+}\frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{f'(b)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}=\frac{f'_+(a)}{f'_+(a)+f'_+(a)}=\frac{1}{2}.$$

（19）（本题满分 10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D[\cos x^2\sin y^2+\sin(x+y)]d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le a^2,常数a>0\}$.

【答案】$\dfrac{\pi}{2}(1-\cos a^2)$

【解析】$\iint\limits_D[\cos x^2\sin y^2+\sin(x+y)]d\sigma=\iint\limits_D\cos x^2\sin y^2d\sigma+\iint\limits_D\sin(x+y)d\sigma,$

$$\iint\limits_D\cos x^2\sin y^2d\sigma=\iint\limits_D\cos y^2\sin x^2d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D(\cos x^2\sin y^2+\cos x^2\sin y^2)d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)d\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sin r^2dr=\frac{\pi}{2}(1-\cos a^2).$$

$$\iint\limits_D\sin(x+y)d\sigma=\iint\limits_D(\sin x\cos y+\cos x\sin y)d\sigma=\iint\limits_D\sin x\cos yd\sigma+\iint\limits_D\cos x\sin yd\sigma=0.$$

故 $\iint\limits_D[\cos x^2\sin y^2+\sin(x+y)]d\sigma=\dfrac{\pi}{2}(1-\cos a^2).$

（20）（本题满分 11 分）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3,\\2x_1+(k+4)x_2-5x_3=6,\\-x_1-2x_2+kx_3=-3,\end{cases}$ 有无穷多解，3 阶矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0,$ 其对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,2k,-1),\alpha_2=(k,k+3,k+2),\alpha_1=(k-2,-1,k+1).$

（Ⅰ）求 k 的值；（Ⅱ）求矩阵 A^3.

【答案】（Ⅰ）$k=0$；（Ⅱ）$\begin{bmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{bmatrix}$

【解析】（Ⅰ）$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\2&k+4&-5&6\\-1&-2&k&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\0&k&-7&0\\0&0&k+1&0\end{array}\right]$，由方程组有无穷多解知 $k=-1,$ 或 $k=0.$ 当 $k=-1$ 时，$\alpha_1=(1,-2,-1),\alpha_2=(-1,2,1),\alpha_1=(-3,-1,0)$ 线性相关，与题意矛盾，故 $k\ne-1.$ 当 $k=0$ 时，$\alpha_1=(1,0,-1),\alpha_2=(0,3,2),\alpha_1=(-2,-1,1)$ 线性无关，

故 $k=0$ 为所求.

（Ⅱ）由（Ⅰ）及已知条件知 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，故

$$A^3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}^3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{bmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{bmatrix}.$$

（21）（本题满分 11 分）设 n 阶实对称矩阵 A 只有两个不同的特征值 $\lambda_1=1$ 和 λ_2，且 A 的属于 λ_1 的特征向量仅有 $(1,0,\cdots,0,1)^T$.（Ⅰ）求矩阵 A；（Ⅱ）当 λ_2 满足什么条件时，A 是正定矩阵.

【答案】（Ⅰ）$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+\lambda_2)&0&\cdots&0&\frac{1}{2}(1-\lambda_2)\\0&\lambda_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_2&0\\\frac{1}{2}(1-\lambda_2)&0&\cdots&0&\frac{1}{2}(1+\lambda_2)\end{bmatrix}$；（Ⅱ）$\lambda_2>0$

【解析】（Ⅰ）设 λ_2 对应的特征向量为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，由 A 为实对称矩阵，故 $x_1+x_n=0$. 解此方程，得 λ_2 对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\alpha_{n-2}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_{n-1}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

单位化得正交矩阵 $Q=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&\cdots&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$,

故 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda=diag(\lambda_2,\lambda_2,\cdots,\lambda_2,1)$.

于是 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}(1-\lambda_2) \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \frac{1}{2}(1-\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}(1+\lambda_2) \end{bmatrix}$.

（Ⅱ）由于 A 为实对称矩阵，所以 A 正定的充分必要条件是其特征值全大于 0，故 $\lambda_2>0$.

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(4x+3y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（Ⅰ）求常数 A, 并判断 X 与 Y 的独立性；（Ⅱ）求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

【答案】（Ⅰ）$A=12$，X 与 Y 相互独立；（Ⅱ）$f_Z(z)=\begin{cases} 12e^{-3z}(1-e^{-z}), & z\ge 0, \\ 0, & z<0. \end{cases}$

【解析】（Ⅰ）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = A\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(4x+3y)}dxdy=\frac{A}{12}=1$, 故 $A=12$；由于 $f_X(x)=\begin{cases} 4e^{-4x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $f_Y(x)=\begin{cases} 3e^{-3y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 即 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 故 X 与 Y 相互独立.

（Ⅱ）利用卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$,

当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=0$;

当 $z\ge 0$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z 12e^{-4x}e^{-3(z-x)}dx=12\int_0^z e^{-3z}e^{-x}dx=12e^{-3z}(1-e^{-z})$.

故 $f_Z(z)=\begin{cases} 12e^{-3z}(1-e^{-z}), & z\ge 0, \\ 0, & z<0. \end{cases}$

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases} \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 X 的简单随机样本值.

（Ⅰ）求 θ 的矩估计值；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量.

【答案】（Ⅰ）$\hat{\theta}=(\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}})^2$；（Ⅱ）$\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)^2}$

【解析】（Ⅰ）由 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^1 x\sqrt{\theta}e^{\sqrt{\theta}-1}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$, 解得 $\theta=(\frac{EX}{1-EX})^2$, 故 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=(\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}})^2$.

（Ⅱ）似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\sqrt{\theta}-1}$, 两边取对数得 $\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$. 令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2\theta}-\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$, 则 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)^2}$.