数学二测试卷解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \tan t^2 dt}{x^3}, & x\neq 0,\\ k, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $k=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{3}$.　　（B）$\dfrac{1}{6}$.　　（C）0.　　（D）3.

【答案】（A）

【解析】由已知及洛必达，得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \tan t^2 dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}=k.$ 故选（A）.

（2）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n x+\cos^n x}(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}),$ 则 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内不可导的个数为（　　）

（A）3.　　（B）2.　　（C）1.　　（D）0.

【答案】（C）

【解析】由夹逼准则得 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{4},\\ \sin x, & \dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ 再结合导数定义可知 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处不可导，故选（C）.

（3）设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\sin x}dx,$ 则（　　）

（A）$I_2>1>I_1$.　　（B）$I_2>I_1>1$.　　（C）$1>I_2>I_1$.　　（D）$1>I_1>I_2$.

【答案】（B）

【解析】当 $x>0$ 时，$x>\sin x, \dfrac{x}{\sin x}>1>\dfrac{\sin x}{x},$ 所以 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx<I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\sin x}dx,$

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x,$ 即 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi},$ 故 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2}{\pi}dx=1,$ 故选（B）.

（4）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内二次可导，已知 $f(0)=0, f'(0)=1,$ 且 $f''(x)<0$ 当 $x\in(-1,1)$ 时成立，则（　　）

（A）当 $x\in(-1,0)$ 时 $f(x)>x,$ 而当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)<x$.

（B）当 $x\in(-1,0)$ 时 $f(x)<x$, 而当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)>x$.

（C）当 $x\in(-1,0)$ 与 $x\in(0,1)$ 时都有 $f(x)>x$.

（D）当 $x\in(-1,0)$ 与 $x\in(0,1)$ 时都有 $f(x)<x$.

【答案】（D）

【解析】由题设知，曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=x$, 而曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内是凸弧.由凸弧与其上某点处的切线的位置关系即知结论（D）正确.

（5）设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)$ 等于（　　）.

（A）$2f(2)$.　　（B）$f(2)$.　　（C）$-f(2)$.　　（D）0.

【答案】（B）

【解析】交换积分次序,使得只有外面这道积分限中才有 t，其他地方不出现 t

由 $F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$ 知：$\begin{cases}y<x<t\\1<y<t\end{cases}$，交换积分次序 $\begin{cases}1<x<t\\1<y<x\end{cases}$，得

$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t[\int_1^x f(x)dy]dx=\int_1^t f(x)(x-1)dx$$

于是，$F'(t)=f(t)(t-1)$，从而有 $F'(2)=f(2)$，故应选(B).

（6）设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）.

（A）$2yf'(xy)$.　　（B）$-2yf'(xy)$.　　（C）$\dfrac{2}{x}f(xy)$.　　（D）$-\dfrac{2}{x}f(xy)$.

【答案】（A）

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f(xy)+\dfrac{y}{x}\cdot y\cdot f'(xy),\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}f(xy)+\dfrac{y}{x}\cdot x\cdot f'(xy),$

所以有 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2yf'(xy)$.

（7）设 $A=\begin{bmatrix}1&2&k\\-1&1&2\\0&3&1\end{bmatrix}$, B 是 3 阶矩阵，$r(B)=2,r(AB)=1,$ 则 $k=$（　　）

（A）1.　　（B）-1.　　（C）2.　　（D）-2.

【答案】（B）

【解析】由已知，有 $1=r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}\le 2,$ 故 $r(A)<3.$

又由于 $A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 3 & k+2 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{bmatrix}$, 故 $k=-1$.

（8）设 n 维列向量组（Ⅰ）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m (m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组（Ⅱ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充分必要条件为（　　）

（A）向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表示.
（B）向量组（Ⅱ）可由向量组（Ⅰ）线性表示.
（C）矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 等价.
（D）向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）等价.

【答案】（C）

【解析】因为 A 与 B 等价，有 $r(A)=r(B)=m$, 所以 B 的 m 个列向量线性无关.

当向量组（Ⅱ）线性无关时，矩阵 A 与 B 均等价与 $\begin{bmatrix} E_m \\ O \end{bmatrix}$，故 A 与 B 等价.

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^{f(x)}-1}=1$, 则 $f(x)$ 的极小值为______.

【答案】0

【解析】由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^{f(x)}-1}=1$, 知 $\lim\limits_{x\to 0}[e^{f(x)}-1]=0$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$.

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^{f(x)}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{f(x)}=1$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{f(x)-f(0)}{x}}=1$, 故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{f(x)}=1>0$, 由保号性，$\exists\delta>0,\forall x\in(-\delta,0)\bigcup(0,\delta)$, 有 $\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{f(x)}>0$, 故

$f(x)>0=f(0)$, 所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$.

(10) 定积分 $I=\int_0^{2018}x(x-1)(x-2)\cdots(x-2018)dx=$______.

【答案】0

【解析】令 $x-1009=t$, 则

$$I=\int_{-1009}^{1009}(t+1009)(t+1008)\cdots(t+1)t(t-1)\cdots(t-1008)(t-1009)dt$$
$$=\int_{-1009}^{1009}(t^2-1009^2)(t^2-1008^2)\cdots(t^2-1)tdt=0.$$

（11）设 $y=y(x)$ 满足微分方程 $xy'=xe^x-y$, 且 $y(1)=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$, 则

$y=y(x)=$______.

【答案】$\frac{1}{x}[xe^x-e^x+4(\sqrt{2}-1)]$

【解析】将原方程化为 $y'+\frac{1}{x}y=e^x$, 解一阶线性微分方程得 $y=\frac{1}{x}(xe^x-e^x+C)$. 又由于 $y(1)=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx=4(\sqrt{2}-1)$, 从而得 $C=4(\sqrt{2}-1)$, 所以 $y=\frac{1}{x}[xe^x-e^x+4(\sqrt{2}-1)]$.

（12）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有三阶连续导数，且满足 $2f(x)-f(\frac{x}{2})=2(x-x^2)$, 则

$f'''(0)=$_____.

【答案】0

【解析】由已知等式得 $f(0)=0$.

等式两边同时对 x 求导，得 $2f'(x)-\frac{1}{2}f'(\frac{x}{2})=2(1-2x)$, （*）. 令 $x=0$, 得 $f'(0)=\frac{4}{3}$.

对（*）两边同时对 x 求导，得 $2f''(x)-\frac{1}{4}f''(\frac{x}{2})=-4$, （**）. 令 $x=0$, 得 $f''(0)=-\frac{16}{7}$.

对(**)两边同时对 x 求导，得 $2f'''(x)-\frac{1}{8}f'''(\frac{x}{2})=0$, 令 $x=0$, 得 $f'''(0)=0$.

（13）设 $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt$, 则 $f'(0)=$______.

【答案】0

【解析】

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt}{x}\underline{\underline{u=\frac{1}{t}}}\lim_{x\to0}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2}du}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{u^2}d\sin u}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left.\frac{\sin u}{u^2}\right|_{\frac{1}{x}}^{+\infty}+\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}du}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2\sin\frac{1}{x}+\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}du}{x}=\lim_{x\to0}(-x\sin\frac{1}{x}+\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}du}{x})$$

$$0\le\left|-x\sin\frac{1}{x}+\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}du}{x}\right|\le\left|-x\sin\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2}{u^3}du}{x}\right|=\left|-x\sin\frac{1}{x}\right|+|x|\to0,x\to0.$$

由夹逼准则，有 $f'(0)=0$.

（14）设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$，则行列式 $\left|(A^{-1})^*\right|=$______.

【答案】$-(4!)^3$

【解析】$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\left|(A^{-1})^*\right|=\left|A^{-1}\right|^3=(-4!)^3=-(4!)^3$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt\right]^{\frac{1}{x^3+1-\cos x^2}}$.

【答案】$e^{\frac{1}{3}}$

【解析】原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt]}{x^3+1-\cos x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin[(\sin x)^2]\cos x}{3x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$.

（16）（本题满分 10 分）设 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-4y'+3y=xe^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线在 $y=x^2-\frac{1}{4}x+1$ 在该点处的切线重合，求 $y=y(x)$.

【答案】$\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}-(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x)e^x$

【解析】$y''-4y'+3y=xe^x$ 的特征方程为 $r^2-4r+3=0$，得 $r_1=1,r_2=3$. 令特解 $y^*=x(ax+b)e^x$，将 y^* 代入微分方程得 $-4ax+2a-2b=x$，故 $a=b=-\frac{1}{4}$，所以方程的通解为 $y(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}-(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x)e^x$，（$C_1,C_2$ 为任意常数）.又已知有公切线，得 $y(0)=1,y'(0)=-\frac{1}{4}$，故 $C_1+C_2=1,C_1+3C_2=0$，解得 $C_1=\frac{3}{2},C_2=-\frac{1}{2}$，所以方程的通解为 $y(x)=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}-(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x)e^x$.

（17）（本题满分 10 分）函数 $z=f(x,y)$ 的全增量 $\Delta z=(2x-3)\Delta x+(2y+4)\Delta y$，且

$f(0,0)=0,$ 求 $z=f(x,y)$ 在 $D:x^2+y^2\le 25$ 上的最值.

【答案】最小值为 $-\dfrac{25}{4}$, 最大值为 50

【解析】依题意，有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-3, \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+4,\ z=\int(2x-3)dx+\varphi(y)=x^2-3x+\varphi(y).$

又由 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(y)=2y+4,$ 积分得 $\varphi(y)=y^2+4y+C,$ 则 $z=x^2-3x+y^2+4y+C.$

由 $f(0,0)=0,$ 得 $C=0,$ 故 $f(x,y)=x^2-3x+y^2+4y.$

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-3=0, \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+4=0,$ 得 $x_1=\dfrac{3}{2}, y_1=-2, f(\dfrac{3}{2},-2)=-\dfrac{25}{4}.$

令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-3x+4y+\lambda(x^2+y^2-25),$

由 $\begin{cases} L'_x=2x-3+2\lambda x=0, \\ L'_y=2y+4+2\lambda y=0, \\ L'_\lambda=x^2+y^2-25=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=-4, \end{cases} f(3,-4)=0, \begin{cases} x_3=-3, \\ y_3=4, \end{cases} f(-3,4)=50,$

所以最小值为 $-\dfrac{25}{4}$, 最大值为 50.

（18）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(x)>0$.（Ⅰ）证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(b)(\xi-a)+f(a)(b-\xi)$;（Ⅱ）对（Ⅰ）中的 $\xi\in(a,b)$，求 $\lim\limits_{b\to a^+}\dfrac{\xi-a}{b-a}$.

【答案】（Ⅰ）略（Ⅱ）$\dfrac{1}{2}$

【解析】（Ⅰ）令 $\varphi(x)=f(b)(x-a)+f(a)(b-x)-\int_a^b f(x)dx(a\le x\le b),$ 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且单调递增，所以 $f(a)<f(x)<f(b), x\in(a,b),$

且 $f(a)(b-a)<\int_a^b f(x)dx<f(b)(b-a), x\in(a,b),$ 于是 $\varphi(a)<0, \varphi(b)>0,$ 由零点定理得 $\exists\xi\in(a,b),$ 使得 $\varphi(\xi)=0,$ 即 $\int_a^b f(x)dx=f(b)(\xi-a)+f(a)(b-\xi).$

（Ⅱ）$\lim\limits_{b\to a^+}\dfrac{\xi-a}{b-a}=\lim\limits_{b\to a^+}\dfrac{\int_a^b f(x)dx-f(a)(b-a)}{(b-a)[f(b)-f(a)]}=\lim\limits_{b\to a^+}\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)f'(b)+f(b)-f(a)}$

$$=\lim_{b\to a^+}\frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{f'(b)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}=\frac{f'_+(a)}{f'_+(a)+f'_+(a)}=\frac{1}{2}.$$

（19）（本题满分 10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D[\cos x^2\sin y^2+\sin(x+y)]d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le a^2,常数a>0\}$.

【答案】$\dfrac{\pi}{2}(1-\cos a^2)$

【解析】$\iint\limits_D[\cos x^2\sin y^2+\sin(x+y)]d\sigma=\iint\limits_D\cos x^2\sin y^2d\sigma+\iint\limits_D\sin(x+y)d\sigma,$

$$\iint\limits_D\cos x^2\sin y^2d\sigma=\iint\limits_D\cos y^2\sin x^2d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D(\cos x^2\sin y^2+\cos x^2\sin y^2)d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)d\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sin r^2dr=\frac{\pi}{2}(1-\cos a^2).$$

$$\iint\limits_D\sin(x+y)d\sigma=\iint\limits_D(\sin x\cos y+\cos x\sin y)d\sigma=\iint\limits_D\sin x\cos yd\sigma+\iint\limits_D\cos x\sin yd\sigma=0.$$

故 $\iint\limits_D[\cos x^2\sin y^2+\sin(x+y)]d\sigma=\dfrac{\pi}{2}(1-\cos a^2).$

（20）（本题满分 11 分）设函数 $f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|dt(x>0)$，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

【答案】$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x & 0<x<1\\ 2x & x\ge1\end{cases}$ $f_{\min}(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

【解析】当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)dt+\int_x^1\left(t^2-x^2\right)dt=\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}$

当 $x\ge1$ 时，$f(x)=\int_0^1\left(x^2-t^2\right)dt=x^2-\dfrac{1}{3}$

则 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}, & 0\le x<1,\\ x^2-\dfrac{1}{3}, & x\ge1,\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x & 0<x<1\\ 2x & x>1\end{cases}$.

由导数的定义可知，$f'(1)=2$ 故 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x & 0<x<1\\ 2x & x\ge1\end{cases}$

易知 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

（21）（本题满分 11 分）已知曲线 L 的方程 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2,\end{cases}(t\ge0)$

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应 $x\le x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

【答案】(I) 曲线 L 是凸的；(II) 切点为(2，3)，切线方程为 $y=x+1$；(III) $\frac{7}{3}$

【解析】

计算该参数方程的各阶导数如下

(I) $\frac{dx}{dt}=2t,\frac{dy}{dt}=4-2t,\frac{dy}{dx}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3}<0\quad(t>0),$$

所以曲线 L 是凸的.

(II)设切点 (x_0,y_0) 对应参数 $t=t_0$，即 $x_0=t_0^2+1$， $y_0=4t_0-t_0^2$，

切线方程为 $y-0=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(x+1)$，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}=\frac{2}{t_0}-1,\text{由}\frac{2}{t_0}-1=\frac{4t_0-t_0^2}{t_0^2+1+1}\Rightarrow t_0=1(t\ge 0),$$

所以，切点为(2，3)，切线方程为 $y=x+1$.

(III) 设 L 的方程 $x=g(y)$，则 $S=\int_0^3\left[\left(g(y)-(y-1)\right)\right]dy$.

由 $t^2-4t+y=0$ 解出 $t=2\pm\sqrt{4-y}$, 又切点 $(2,3)$ 对应 $t=1$, 得 $t=2-\sqrt{4-y}$，

可知 $x=\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2+1=g(y)$,

所以 $S=\int_0^3\left[\left(9-y-4\sqrt{4-y}\right)-(y-1)\right]dy=\int_0^3(10-2y)dy-4\int_0^3\sqrt{4-y}dy$

$$=(10y-y^2)\Big|_0^3+4\int_0^3\sqrt{4-y}\,d(4-y)=21+4\times\frac{2}{3}\times(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$$

$$=21+\frac{8}{3}-\frac{64}{3}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}.$$

（22）（本题满分 11 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+(k+4)x_2-5x_3=6, \\ -x_1-2x_2+kx_3=-3, \end{cases}$有无穷多解，3 阶矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$，其对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,2k,-1),\alpha_2=(k,k+3,k+2),\alpha_1=(k-2,-1,k+1)$.

（Ⅰ）求 k 的值；（Ⅱ）求矩阵 A^3.

【答案】（Ⅰ）$k=0$；（Ⅱ）$\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

【解析】（Ⅰ）$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & k+4 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & k & -3 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & k & -7 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right]$，由方程组有无穷多解知 $k=-1$，或 $k=0$. 当 $k=-1$ 时，$\alpha_1=(1,-2,-1),\alpha_2=(-1,2,1),\alpha_1=(-3,-1,0)$ 线性相关，与题意矛盾，故 $k\neq-1$. 当 $k=0$ 时，$\alpha_1=(1,0,-1),\alpha_2=(0,3,2),\alpha_1=(-2,-1,1)$ 线性无关，故 $k=0$ 为所求.

（Ⅱ）由（Ⅰ）及已知条件知 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，故

$$A^3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -6 & 8 \end{bmatrix}.$$

（23）（本题满分 11 分）设 n 阶实对称矩阵 A 只有两个不同的特征值 $\lambda_1=1$ 和 λ_2，且 A 的属于 λ_1 的特征向量仅有 $(1,0,\cdots,0,1)^T$.（Ⅰ）求矩阵 A；（Ⅱ）当 λ_2 满足什么条件时，A 是正定矩阵.

【答案】（Ⅰ）$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}(1-\lambda_2) \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \frac{1}{2}(1-\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}(1+\lambda_2) \end{bmatrix}$；（Ⅱ）$\lambda_2>0$

【解析】（Ⅰ）设 λ_2 对应的特征向量为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，由 A 为实对称矩阵，故 $x_1+x_n=0.$ 解此方程，得 λ_2 对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\alpha_{n-2}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_{n-1}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$

单位化得正交矩阵 $Q=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&\cdots&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$,

故 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda=diag(\lambda_2,\lambda_2,\cdots,\lambda_2,1).$

于是 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+\lambda_2)&0&\cdots&0&\frac{1}{2}(1-\lambda_2)\\0&\lambda_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_2&0\\\frac{1}{2}(1-\lambda_2)&0&\cdots&0&\frac{1}{2}(1+\lambda_2)\end{bmatrix}.$

（Ⅱ）由于 A 为实对称矩阵，所以 A 正定的充分必要条件是其特征值全大于 0，故 $\lambda_2>0.$