$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$, $EXY = \frac{2}{3}$

所以，$\operatorname{cov}(X,Y) = 0$，$\operatorname{cov}(Y,Y) = DY = \frac{2}{3}$，$\operatorname{cov}(X-Y,Y) = -\frac{2}{3}$，$\rho_{XY} = 0$.

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$，设 $Z = X - Y$，

(1) 求 z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$；

(2) 设 $z_1, z_2, \cdots z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\overline{\sigma}^2$；

(3) 证明 $\overline{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

【解析】:（1）因为 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,2\sigma^2)$，且 X 与 Y 相互独立，故 $Z = X - Y \sim N(0,5\sigma^2)$，

所以，Z 的概率密度为 $f(z,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{10\sigma^2}}, (-\infty < z < +\infty)$

（2）似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i,\sigma^2) = \frac{1}{(10\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2} = (10\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$$

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(10\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

$$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{10(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 0$$

解得最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$，

最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$

（3）$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right) = \frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n} EZ_i^2 = \frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}\left[(EZ_i)^2 + DZ_i\right] = \frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n} 5\sigma^2 = \sigma^2$

故 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。